

EXAMEN 10 SEP · HOY 6 SEP · 4 DÍAS · PAPEL

GUÍA MEGA — EXAMEN 1 A PAPEL

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias · HU325 · UDLAP

Dr. Felipe Aguilar Romero · Libro: Zill 11^a ed.**Hoy: domingo 6 de septiembre 2026 · Examen: jueves 10 de septiembre 2026****Quedan 4 días · Sin CAS · Sin Wolfram · A mano**

Por qué existe este documento No has hecho las tareas. Eso no se arregla leyendo teoría: se arregla **resolviendo a fondo** los tipos que sí caen. Esta guía desarrolla paso a paso (álgebra completa + verificación por derivación) los ejercicios explícitos T3.6–T3.9 y 16 ejercicios típicos del Zill en las páginas de las Tareas 1–4. El objetivo: el jueves puedas clasificar, integrar y verificar sin mirar apuntes.

Índice

1. Mapa de las tareas (Zill 11e) y qué estudiar	3
2. Árbol de decisión — EDO de primer orden	3
3. Chuletas de memoria (escríbelas en el margen)	4
4. Tarea 3 explícitos — T3.6 a T3.9 (desarrollo total)	4
4.1. T3.6 — Lineal: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^2, x > 0$	4
4.2. T3.7 — Lineal: $\frac{dy}{dx} - 3y = 2xe^{3x}$	6
4.3. T3.8 — PVI lineal: $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^2 \ln x, y(1) = 2, x > 0$	6
4.4. T3.9 — PVI lineal: $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2 e^x, y(1) = 1, x > 0$	7
5. Dieciséis ejercicios adicionales resueltos a fondo	8
5.1. Ejercicio A1 — Clasificar (tipo Tarea 1 / p. 12)	8
5.2. Ejercicio A2 — Clasificar (tipo Tarea 1)	9
5.3. Ejercicio A3 — Verificar solución (tipo Tarea 1 / p. 52)	9
5.4. Ejercicio A4 — Verificar familia (tipo Tarea 1)	9
5.5. Ejercicio A5 — Separable (tipo Tarea 2 / p. 35)	9
5.6. Ejercicio A6 — Separable (tipo Tarea 2)	10
5.7. Ejercicio A7 — Separable con logaritmo (tipo Tarea 2 / p. 62)	10
5.8. Ejercicio A8 — Lineal (tipo Tarea 2–3 / p. 63)	11
5.9. Ejercicio A9 — Lineal (tipo Tarea 3)	11
5.10. Ejercicio A10 — PVI lineal (tipo Tarea 3)	11
5.11. Ejercicio A11 — PVI lineal con P no constante	12
5.12. Ejercicio A12 — Exacta (tipo Tarea 4 / p. 70)	12
5.13. Ejercicio A13 — Exacta (tipo Tarea 4)	13
5.14. Ejercicio A14 — Exacta (tipo Tarea 4)	13
5.15. Ejercicio A15 — Homogénea (tipo clase / Tarea 2)	13
5.16. Ejercicio A16 — Homogénea (tipo clase)	14
6. Técnica de examen en papel	14

7. Mini simulacro cronometrado (40 minutos)	15
7.1. Problemas (hazlos sin mirar)	15
7.2. Respuestas del simulacro (solo después)	15
8. Checklist: 4 días / noche antes / día del examen	16
8.1. Plan de 4 días (6–9 sep)	16
8.2. Noche antes (9 sep)	16
8.3. Día del examen (10 sep)	16
Fuentes	17

1. Mapa de las tareas (Zill 11e) y qué estudiar

Tarea	Fecha	Contenido Zill
1	19 ago	p. 12 ej. 1–5, 9–10, 11–14, 21–24; p. 52 ej. 1–22 (uno de cada tipo)
2	29 ago	p. 19 ej. 7–10, 11–14; p. 21 ej. 49; p. 35 ej. 7–12, 17, 31–34; p. 52 ej. 23–28; p. 62 pares 2..24
3	29 ago	p. 63 ej. 25–44 + T3.6–T3.9 explícitos (lineales / PVI)
4	5 sep	p. 70 ej. 1–26, 27, 29–30, 31, 33, 35, 37 (exactas)

Prioridad de estudio (orden estricto, 4 días)

1. **Sección 4** — T3.6 a T3.9 (los más seguros del examen).
2. **Sección 2** — árbol de decisión (1 minuto de memoria).
3. **Sección 3** — chuletas (cópielas a mano una vez).
4. **Sección 5** — 16 ejercicios resueltos (elige 8 hoy, 8 mañana).
5. **Sección 7** — mini simulacro cronometrado (miércoles).
6. **Sección 8** — checklist noche antes / día del examen.

2. Árbol de decisión — EDO de primer orden

Dada una EDO de primer orden escrita como $F(x, y, y') = 0$ o como $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$:

1. **¿Es separable?** Forma $y' = g(x)p(y)$, o $M = A(x)B(y)$ y $N = C(x)D(y)$. $\Rightarrow$ Separar: $\int \frac{1}{p(y)} dy = \int g(x) dx + C$.
2. **¿Es lineal en y ?** Forma estándar $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$ (coeficiente de y' es 1; P y f solo dependen de x). $\Rightarrow$ Factor $\mu = e^{\int P dx}$, luego $(\mu y)' = \mu f$.
3. **¿Es homogénea?** $y' = F(y/x)$ (o M y N son homogéneas del mismo grado). $\Rightarrow$ Sustitución $v = y/x$, $y = vx$, $y' = v + xv'$.
4. **¿Es exacta?** $M dx + N dy = 0$ con $M_y = N_x$. $\Rightarrow F = \int M dx + g(y)$, imponer $F_y = N$, solución $F = C$.
5. **Si casi exacta:** calcula $M_y - N_x$.
 - Si $\frac{M_y - N_x}{N}$ es función solo de x : $\mu(x) = e^{\int (\dots) dx}$.
 - Si $\frac{N_x - M_y}{M}$ es función solo de y : $\mu(y) = e^{\int (\dots) dy}$.
6. **Bernoulli:** $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ ($n \neq 0, 1$). $\Rightarrow v = y^{1-n}$ la convierte en lineal.

En el examen: una línea de clasificación Antes de integrar escribe: “Lineal, $P = \dots$ ” o “Exacta, $M_y = N_x = \dots$ ”. Eso ordena tu cabeza y da puntos de método aunque te equivoques en un signo.

3. Chuletas de memoria (escribelas en el margen)

Lineal de 1.er orden Forma estándar: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$.

Factor integrante: $\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$ (**sin** $+C$).

Multiplicar: $\mu y' + \mu P y = \mu f \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(\mu y) = \mu f$.

Integrar: $\mu y = \int \mu f dx + C \Rightarrow y = \frac{1}{\mu} \left(\int \mu f dx + C \right)$.

Separable $\frac{dy}{dx} = g(x)p(y) \Rightarrow \int \frac{1}{p(y)} dy = \int g(x) dx + C$.

Cuidado: soluciones singulares donde $p(y) = 0$ (p. ej. $y \equiv 0$).

Exacta $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ es exacta $\Leftrightarrow M_y = N_x$.

$F(x, y) = \int M dx + g(y)$; imponer $F_y = N$ para hallar g .

Solución implícita: $F(x, y) = C$.

Si $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$: $\mu(x) = e^{\int f dx}$.

Si $\frac{N_x - M_y}{M} = g(y)$: $\mu(y) = e^{\int g dy}$.

Homogénea Si $y' = F(y/x)$: pon $v = y/x$, entonces $y = vx$ y $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$.

Sustituye, separa variables en v y x , integra, vuelve a $y = vx$.

Integrales que siempre salen en papel $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ($n \neq -1$); $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$; $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$.

Partes: $\int u dv = uv - \int v du$.

Típicas: $\int x e^{ax} dx$, $\int x^n \ln x dx$, $\int \ln x dx = x \ln x - x$.

4. Tarea 3 explícitos — T3.6 a T3.9 (desarrollo total)

Estos cuatro salieron explícitos en la Tarea 3. Domínalos hasta poder rehacerlos en blanco en menos de 8 minutos cada uno.

4.1. T3.6 — Lineal: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^2$, $x > 0$

T3.6 — enunciado, clasificación y desarrollo **Enunciado.** Resolver

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^2, \quad x > 0.$$

Clasificación. Ya está en forma estándar lineal: $P(x) = \frac{2}{x}$, $f(x) = x^2$. No es separable de un vistazo (hay término y y término x^2 independientes).

Paso 1 — Factor integrante.

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln |x|}.$$

Como $x > 0$, $|x| = x$, así $\ln |x| = \ln x$ y

$$\mu(x) = e^{2 \ln x} = (e^{\ln x})^2 = x^2.$$

(No añadimos constante en μ .)

Paso 2 — Multiplicar la EDO por μ .

$$x^2 \frac{dy}{dx} + x^2 \cdot \frac{2}{x} y = x^2 \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 y' + 2x y = x^4.$$

El lado izquierdo es exactamente $\frac{d}{dx}(x^2 y)$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = 2x y + x^2 y'.$$

Paso 3 — Integrar ambos lados.

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = x^4 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d}{dx}(x^2 y) dx = \int x^4 dx \quad \Rightarrow \quad x^2 y = \frac{x^5}{5} + C.$$

Paso 4 — Despejar y .

$$y = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^5}{5} + C \right) = \frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2}.$$

$$\boxed{y = \frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2}}$$

T3.6 — verificación por derivación (completa) Sea $y = \frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2} = \frac{x^3}{5} + Cx^{-2}$.

Derivada:

$$y' = \frac{3x^2}{5} + C(-2)x^{-3} = \frac{3x^2}{5} - \frac{2C}{x^3}.$$

Sustituir en $y' + \frac{2}{x}y$:

$$\begin{aligned} y' + \frac{2}{x}y &= \frac{3x^2}{5} - \frac{2C}{x^3} + \frac{2}{x} \left(\frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2} \right) \\ &= \frac{3x^2}{5} - \frac{2C}{x^3} + \frac{2}{x} \cdot \frac{x^3}{5} + \frac{2}{x} \cdot \frac{C}{x^2} \\ &= \frac{3x^2}{5} - \frac{2C}{x^3} + \frac{2x^2}{5} + \frac{2C}{x^3} \\ &= \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \right) x^2 + \left(-\frac{2C}{x^3} + \frac{2C}{x^3} \right) \\ &= x^2. \end{aligned}$$

Coincide con el lado derecho. **Verificado.**

4.2. T3.7 — Lineal: $\frac{dy}{dx} - 3y = 2xe^{3x}$ T3.7 — enunciado, clasificación y desarrollo **Enunciado.** Resolver

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 2xe^{3x}.$$

Clasificación. Lineal: $P(x) = -3$, $f(x) = 2xe^{3x}$.**Paso 1 — Factor.**

$$\mu(x) = e^{\int -3 dx} = e^{-3x}.$$

Paso 2 — Multiplicar.

$$e^{-3x}y' - 3e^{-3x}y = 2xe^{3x} \cdot e^{-3x} = 2x.$$

Izquierda: $\frac{d}{dx}(e^{-3x}y)$.**Paso 3 — Integrar.**

$$\frac{d}{dx}(e^{-3x}y) = 2x \quad \Rightarrow \quad e^{-3x}y = \int 2x dx = x^2 + C.$$

Paso 4 — Despejar.

$$y = e^{3x}(x^2 + C).$$

$$\boxed{y = e^{3x}(x^2 + C)}$$

T3.7 — verificación por derivación (completa) $y = e^{3x}(x^2 + C)$. Producto:

$$y' = 3e^{3x}(x^2 + C) + e^{3x} \cdot (2x) = e^{3x}(3x^2 + 3C + 2x).$$

Ahora $y' - 3y$:

$$\begin{aligned} y' - 3y &= e^{3x}(3x^2 + 3C + 2x) - 3 \cdot e^{3x}(x^2 + C) \\ &= e^{3x}(3x^2 + 3C + 2x - 3x^2 - 3C) \\ &= e^{3x}(2x) = 2xe^{3x}. \end{aligned}$$

Coincide. **Verificado.****4.3. T3.8 — PVI lineal:** $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^2 \ln x$, $y(1) = 2$, $x > 0$ T3.8 — enunciado, clasificación y desarrollo **Enunciado.** Resolver el PVI

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^2 \ln x, \quad y(1) = 2, \quad x > 0.$$

Clasificación. Lineal con $P = \frac{1}{x}$, $f = x^2 \ln x$.**Paso 1 — Factor.**

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x \quad (x > 0).$$

Paso 2 — Multiplicar e integrar.

$$\frac{d}{dx}(xy) = x \cdot x^2 \ln x = x^3 \ln x.$$

Hay que calcular $\int x^3 \ln x \, dx$ por partes.

Paso 3 — Integración por partes. Sea $u = \ln x$, $dv = x^3 \, dx$. Entonces $du = \frac{1}{x} \, dx$, $v = \frac{x^4}{4}$.

$$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + K = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + K.$$

Así (absorbiendo K en la constante de la EDO):

$$xy = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

Paso 4 — Despejar y .

$$y = \frac{x^3}{4} \ln x - \frac{x^3}{16} + \frac{C}{x}.$$

Paso 5 — Condición inicial $y(1) = 2$.

$$y(1) = \frac{1^3}{4} \ln 1 - \frac{1}{16} + \frac{C}{1} = 0 - \frac{1}{16} + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 2 + \frac{1}{16} = \frac{32}{16} + \frac{1}{16} = \frac{33}{16}.$$

$$y = \frac{x^3}{4} \ln x - \frac{x^3}{16} + \frac{33}{16x}$$

T3.8 — verificación (CI + idea de la EDO) **CI:** $y(1) = 0 - \frac{1}{16} + \frac{33}{16} = \frac{32}{16} = 2$. OK

EDO (esquema): con $y = \frac{x^3}{4} \ln x - \frac{x^3}{16} + \frac{33}{16x}$ y $\mu = x$, se construyó $(\mu y)' = x^3 \ln x$ por diseño del método, luego dividir por μ recupera la forma lineal. En papel basta: derivar xy , comprobar que sale $x^3 \ln x$, y dividir por x .

4.4. T3.9 — PVI lineal: $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2 e^x$, $y(1) = 1$, $x > 0$

T3.9 — enunciado, clasificación y desarrollo **Enunciado.** Resolver el PVI

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2 e^x, \quad y(1) = 1, \quad x > 0.$$

Clasificación. Lineal: $P = -\frac{2}{x}$, $f = x^2 e^x$.

Paso 1 — Factor.

$$\mu = e^{\int -\frac{2}{x} \, dx} = e^{-2 \ln x} = e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Paso 2 — Multiplicar.

$$\frac{1}{x^2} y' - \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x^2} y = e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x^2} \right) = e^x.$$

(Comprobación del producto: $\frac{d}{dx}(x^{-2}y) = -2x^{-3}y + x^{-2}y'$.)

Paso 3 — Integrar.

$$\frac{y}{x^2} = \int e^x \, dx = e^x + C \quad \Rightarrow \quad y = x^2(e^x + C).$$

Paso 4 — CI $y(1) = 1$.

$$1 \cdot (e^1 + C) = 1 \Rightarrow e + C = 1 \Rightarrow C = 1 - e.$$

$$y = x^2(e^x + 1 - e)$$

T3.9 — verificación por derivación (completa) $y = x^2(e^x + 1 - e)$. Producto:

$$y' = 2x(e^x + 1 - e) + x^2e^x.$$

Ahora $y' - \frac{2}{x}y$:

$$\begin{aligned} y' - \frac{2}{x}y &= 2x(e^x + 1 - e) + x^2e^x - \frac{2}{x} \cdot x^2(e^x + 1 - e) \\ &= 2x(e^x + 1 - e) + x^2e^x - 2x(e^x + 1 - e) \\ &= x^2e^x. \end{aligned}$$

Coincide con el lado derecho. CI: $y(1) = 1 \cdot (e + 1 - e) = 1$. OK **Verificado**.

Regla de oro con T3.6–T3.9 Si el examen pide un lineal o un PVI lineal, el esquema es siempre el mismo: forma estándar $\rightarrow \mu \rightarrow (\mu y)' = \mu f \rightarrow$ integrar $\rightarrow$ (si hay CI) hallar $C \rightarrow$ enmarcar $\rightarrow$ verificar en 3 renglones.

5. Dieciséis ejercicios adicionales resueltos a fondo

Tipos cubiertos por las Tareas 1–4 del Zill: clasificar, verificar solución, separable, lineal, PVI lineal, exacta, homogénea.

5.1. Ejercicio A1 — Clasificar (tipo Tarea 1 / p.12)

A1 — Clasificar: $x^2y'' + xy' + 2y = \sin x$ **Enunciado**. Clasificar la EDO: orden, lineal/no lineal, y si es homogénea lineal (en el sentido de $L[y] = 0$).

Clasificación.

- Orden 2 (aparece y'').
- Lineal: la incógnita y y sus derivadas aparecen a la primera potencia; no hay $y \cdot y'$, y^2 , $\sin y$, etc.
- Forma $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$ con $g = \sin x \neq 0$: **lineal no homogénea**.

Respuesta enmarcada.

Orden 2, lineal, no homogénea

Verificación conceptual: si $g \equiv 0$ sería homogénea lineal; aquí $g = \sin x$, así que no.

5.2. Ejercicio A2 — Clasificar (tipo Tarea 1)

A2 — Clasificar: $(y')^2 + y = 0$ **Enunciado.** Clasificar $(y')^2 + y = 0$.

Clasificación. Orden 1 (solo y'). No lineal porque y' aparece al cuadrado.

Orden 1, no lineal

Nota de examen: “no lineal” no significa “no se puede resolver”; significa que no aplica el arsenal de lineales (superposición, μ , etc.).

5.3. Ejercicio A3 — Verificar solución (tipo Tarea 1 / p. 52)

A3 — Verificar: $y = 1/x$ resuelve $xy' + y = 0$ **Enunciado.** Comprobar que $y = \frac{1}{x}$ es solución de $xy' + y = 0$ en $x \neq 0$.

Desarrollo.

$$y = x^{-1}, \quad y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Sustituir:

$$x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0.$$

Identidad verdadera.

$y = 1/x$ es solución de $xy' + y = 0$ ($x \neq 0$)

Verificación: ya hecha por sustitución directa (eso *es* la verificación en este tipo de problema).

5.4. Ejercicio A4 — Verificar familia (tipo Tarea 1)

A4 — Verificar: $y = Ce^{-x}$ resuelve $y' + y = 0$ **Enunciado.** Mostrar que $y = Ce^{-x}$ satisface $y' + y = 0$ para toda constante C .

Desarrollo.

$$y' = C(-e^{-x}) = -Ce^{-x}, \quad y' + y = -Ce^{-x} + Ce^{-x} = 0.$$

$y = Ce^{-x}$ es la familia de soluciones de $y' + y = 0$

Nota: $C = 0$ da la solución trivial $y \equiv 0$, también válida.

5.5. Ejercicio A5 — Separable (tipo Tarea 2 / p. 35)

A5 — Separable: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$, $y(0) = 2$ **Enunciado.** Resolver el PVI $y' = \frac{x}{y}$, $y(0) = 2$.

Clasificación. Separable: $y dy = x dx$ (si $y \neq 0$).

Desarrollo.

$$\int y dy = \int x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 + C, \quad C = 2C_1.$$

CI: $y(0) = 2 \Rightarrow 4 = 0 + C \Rightarrow C = 4$. Como $y(0) = 2 > 0$, tomamos la rama positiva cerca de $x = 0$:

$$y = \sqrt{x^2 + 4}.$$

$$y = \sqrt{x^2 + 4}$$

Verificación.

$$y' = \frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{y}.$$

$$y(0) = \sqrt{4} = 2. \text{ OK}$$

5.6. Ejercicio A6 — Separable (tipo Tarea 2)

A6 — Separable: $\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x$, $y(0) = 1$ **Enunciado.** $y' = y^2 \cos x$, $y(0) = 1$.

Clasificación. Separable. (También $y \equiv 0$ es solución singular, pero no cumple $y(0) = 1$.)

Desarrollo. Si $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y^2} = \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad \int y^{-2} \, dy = \int \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = \sin x + C.$$

$$\text{CI: } -\frac{1}{1} = \sin 0 + C \Rightarrow -1 = C.$$

$$-\frac{1}{y} = \sin x - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = 1 - \sin x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{1 - \sin x}.$$

(Válida cerca de $x = 0$, donde $1 - \sin 0 = 1 \neq 0$.)

$$y = \frac{1}{1 - \sin x}$$

Verificación.

$$y' = \frac{0 - (-\cos x)}{(1 - \sin x)^2} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2} = y^2 \cos x.$$

$$y(0) = 1/(1 - 0) = 1. \text{ OK}$$

5.7. Ejercicio A7 — Separable con logaritmo (tipo Tarea 2 / p. 62)

A7 — Separable: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1 + y^2}$ **Enunciado.** Resolver $y' = \frac{2x}{1 + y^2}$.

Clasificación. Separable: $(1 + y^2) \, dy = 2x \, dx$.

Desarrollo.

$$\int (1 + y^2) \, dy = \int 2x \, dx \quad \Rightarrow \quad y + \frac{y^3}{3} = x^2 + C.$$

$$y + \frac{y^3}{3} = x^2 + C$$

Verificación (implícita). Diferenciar $F = y + \frac{y^3}{3} - x^2 - C = 0$:

$$(1 + y^2)y' - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2x}{1 + y^2}.$$

OK

5.8. Ejercicio A8 — Lineal (tipo Tarea 2–3 / p.63)

A8 — Lineal: $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$ **Enunciado.** Resolver $y' + y = e^{-x}$.

Clasificación. Lineal, $P = 1$, $f = e^{-x}$.

Desarrollo.

$$\mu = e^{\int 1 dx} = e^x.$$

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = e^x e^{-x} = 1 \Rightarrow e^x y = x + C \Rightarrow y = e^{-x}(x + C).$$

$$\boxed{y = e^{-x}(x + C)}$$

Verificación.

$$y' = -e^{-x}(x + C) + e^{-x} = -e^{-x}(x + C) + e^{-x},$$

$$y' + y = -e^{-x}(x + C) + e^{-x} + e^{-x}(x + C) = e^{-x}.$$

OK

5.9. Ejercicio A9 — Lineal (tipo Tarea 3)

A9 — Lineal: $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^3$, $x > 0$ **Enunciado.** Resolver $xy' + 2y = x^3$, $x > 0$.

Clasificación. Lineal tras forma estándar:

$$y' + \frac{2}{x}y = x^2.$$

(Es exactamente el mismo tipo que T3.6.)

Desarrollo. $\mu = x^2$, luego

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = x^4 \Rightarrow x^2 y = \frac{x^5}{5} + C \Rightarrow y = \frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2}.$$

$$\boxed{y = \frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2}}$$

Verificación: idéntica a T3.6. OK

5.10. Ejercicio A10 — PVI lineal (tipo Tarea 3)

A10 — PVI: $\frac{dy}{dx} - 2y = e^{2x}$, $y(0) = 0$ **Enunciado.** $y' - 2y = e^{2x}$, $y(0) = 0$.

Clasificación. Lineal, $P = -2$, $f = e^{2x}$.

Desarrollo.

$$\mu = e^{\int -2 dx} = e^{-2x}.$$

$$\frac{d}{dx}(e^{-2x} y) = e^{2x} e^{-2x} = 1 \Rightarrow e^{-2x} y = x + C \Rightarrow y = e^{2x}(x + C).$$

$$\text{CI: } y(0) = 1 \cdot (0 + C) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\boxed{y = x e^{2x}}$$

Verificación.

$$y' = e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = e^{2x}(1 + 2x),$$

$$y' - 2y = e^{2x}(1 + 2x) - 2xe^{2x} = e^{2x}.$$

$y(0) = 0$. OK

5.11. Ejercicio A11 — PVI lineal con P no constante

A11 — PVI: $(x+1)\frac{dy}{dx} + y = x$, $x > -1$, $y(0) = 1$ **Enunciado.** $(x+1)y' + y = x$, $y(0) = 1$, $x > -1$.

Clasificación. Dividir por $x+1$:

$$y' + \frac{1}{x+1}y = \frac{x}{x+1}.$$

Lineal, $P = \frac{1}{x+1}$, $f = \frac{x}{x+1}$.

Desarrollo.

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x+1} dx} = e^{\ln|x+1|} = x+1 \quad (x > -1).$$

$$\frac{d}{dx}((x+1)y) = x \Rightarrow (x+1)y = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = \frac{x^2/2 + C}{x+1}.$$

$$\text{CI: } y(0) = \frac{C}{1} = 1 \Rightarrow C = 1.$$

$$y = \frac{\frac{x^2}{2} + 1}{x+1}$$

Verificación CI: $y(0) = 1/1 = 1$. OK

EDO: $(x+1)y = x^2/2 + 1 \Rightarrow$ derivar: $y + (x+1)y' = x$, que es la EDO original. OK

5.12. Ejercicio A12 — Exacta (tipo Tarea 4 / p. 70)

A12 — Exacta: $(2xy + y^3) dx + (x^2 + 3xy^2) dy = 0$ **Enunciado.** Resolver $(2xy + y^3) dx + (x^2 + 3xy^2) dy = 0$.

Clasificación. $M = 2xy + y^3$, $N = x^2 + 3xy^2$.

$$M_y = 2x + 3y^2, \quad N_x = 2x + 3y^2.$$

$M_y = N_x \Rightarrow$ **exacta.**

Desarrollo.

$$F = \int M dx = \int (2xy + y^3) dx = x^2y + xy^3 + g(y).$$

$$F_y = x^2 + 3xy^2 + g'(y) = N = x^2 + 3xy^2 \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g = \text{const.}$$

Solución: $F = C$ (absorbiendo la constante de g):

$$x^2y + xy^3 = C$$

Verificación. Diferenciar $x^2y + xy^3 = C$:

$$(2xy + y^3) dx + (x^2 + 3xy^2) dy = 0,$$

que es exactamente $M dx + N dy = 0$. OK

5.13. Ejercicio A13 — Exacta (tipo Tarea 4)A13 — Exacta: $(2x + y) dx + (x - 2y) dy = 0$ **Enunciado.** $(2x + y) dx + (x - 2y) dy = 0$.**Clasificación.** $M = 2x + y$, $N = x - 2y$.

$$M_y = 1, \quad N_x = 1.$$

Exacta.

Desarrollo.

$$F = \int M dx = \int (2x + y) dx = x^2 + xy + g(y).$$

$$F_y = x + g'(y) = N = x - 2y \Rightarrow g'(y) = -2y \Rightarrow g = -y^2.$$

$$F = x^2 + xy - y^2 = C.$$

$$\boxed{x^2 + xy - y^2 = C}$$

Verificación. Diferenciar:

$$(2x + y) dx + (x - 2y) dy = 0.$$

OK

5.14. Ejercicio A14 — Exacta (tipo Tarea 4)A14 — Exacta: $(e^x + y) dx + (x + 2y) dy = 0$ **Enunciado.** $(e^x + y) dx + (x + 2y) dy = 0$.**Clasificación.** $M = e^x + y$, $N = x + 2y$.

$$M_y = 1 = N_x.$$

Exacta.

Desarrollo.

$$F = \int (e^x + y) dx = e^x + xy + g(y).$$

$$F_y = x + g'(y) = N = x + 2y \Rightarrow g' = 2y \Rightarrow g = y^2.$$

$$\boxed{e^x + xy + y^2 = C}$$

Verificación. $dF = (e^x + y) dx + (x + 2y) dy = 0$. OK**5.15. Ejercicio A15 — Homogénea (tipo clase / Tarea 2)**A15 — Homogénea: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$ **Enunciado.** Resolver $y' = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$ ($x \neq 0$).**Clasificación.** Homogénea: $F(y/x) = 1 + y/x$.**Desarrollo.** $v = y/x$, $y = vx$, $y' = v + xv'$.

$$v + xv' = 1 + v \Rightarrow xv' = 1 \Rightarrow dv = \frac{dx}{x}.$$

$$v = \ln|x| + C \Rightarrow \frac{y}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow y = x \ln|x| + Cx.$$

$$\boxed{y = x \ln|x| + Cx}$$

Verificación.

$$y' = \ln|x| + x \cdot \frac{1}{x} + C = \ln|x| + 1 + C,$$

$$1 + \frac{y}{x} = 1 + \ln|x| + C.$$

Iguales. OK

5.16. Ejercicio A16 — Homogénea (tipo clase)

A16 — Homogénea: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ **Enunciado.** $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ ($x \neq 0$, $y \neq 0$).

Clasificación. Homogénea: $F(v) = v + 1/v$ con $v = y/x$.

Desarrollo. $y = vx$, $y' = v + xv'$.

$$v + xv' = v + \frac{1}{v} \Rightarrow xv' = \frac{1}{v} \Rightarrow v \, dv = \frac{dx}{x}.$$

$$\frac{v^2}{2} = \ln|x| + C \Rightarrow \frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C.$$

$$\boxed{\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C}$$

Verificación (idea). Diferenciar implícitamente $\frac{y^2}{2x^2} - \ln|x| = C$ y reordenar hasta recuperar $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$. En papel: tras hallar v , basta sustituir atrás una vez para chequear el álgebra de $xv' = 1/v$.

Cómo usar A1–A16 si vas corto de tiempo

- Hoy (día 0): A5, A6, A8, A10, A12, A13 + rehacer T3.6–T3.9.
- Mañana: A7, A9, A11, A14, A15, A16.
- Pasado: A1–A4 (clasificar/verificar, rápidos) + simulacro.

6. Técnica de examen en papel

Orden de presentación (rúbrica mental) Para **cada** problema escribe en este orden:

1. **Clasificación** (1 línea): “Lineal, $P = \dots$, $f = \dots$ ”.
2. **Método** (1 línea): “ $\mu = e^{\int P}$ ” / “separar” / “ $M_y \stackrel{?}{=} N_x$ ” / “ $v = y/x$ ”.
3. **Álgebra** (el cuerpo): factor, integrales, despeje.
4. **CI** (si hay): renglón aparte para C .
5. **Respuesta enmarcada**.
6. **Verificación** (2–4 renglones): derivar y sustituir; en PVI, al menos comprobar $y(x_0) = y_0$.

Errores típicos que restan mucho

1. Olvidar pasar a forma estándar (dejar $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ sin dividir).

2. Meter $+C$ dentro del factor integrante μ .
3. Signo de P : en $y' - 3y = \dots$ es $P = -3$, no $P = 3$.
4. En exactas: integrar M respecto de x tratando y como constante, pero olvidar $+g(y)$.
5. En homogéneas: escribir $y' = v$ en vez de $y' = v + xv'$.
6. En separables: perder la solución singular $y \equiv 0$ cuando aplica, o no justificar la rama $\pm$ tras una raíz.
7. No simplificar $e^{\ln x} = x$ cuando $x > 0$; dejar $\ln|x|$ innecesariamente.
8. Verificar solo la CI y no la EDO (o al revés).

Gestión del tiempo (examen ~ 90 – 100 min)

- 5–10 min: leer todo, marcar fáciles (lineales claros).
- 50–60 min: resolver (primero lineales y separables, luego exactas).
- 15–20 min: verificaciones.
- 5–10 min: repaso de signos y enmarcado de respuestas.

Si te atorras 8 minutos en un problema: clasifica, escribe el método y pasa; vuelve al final.

7. Mini simulacro cronometrado (40 minutos)

Instrucciones Cierra esta guía. Cronómetro 40 minutos. Solo papel y bolígrafo. Al terminar, abre la subsección de respuestas y autocorriégete con rojo: clasificación, método, álgebra, CI, verificación.

7.1. Problemas (hazlos sin mirar)

1. Clasifica y resuelve: $(x+1)y' + y = x$, $x > -1$.
2. PVI lineal: $y' - 2y = e^{2x}$, $y(0) = 0$.
3. Separable: $y' = y^2 \cos x$, $y(0) = 1$.
4. Exacta: $(2x+y)dx + (x-2y)dy = 0$.
5. Homogénea: $y' = \frac{x+y}{x}$.
6. Lineal (tipo T3): $y' + \frac{2}{x}y = x^2$, $x > 0$.
7. Verificar: ¿ $y = xe^{-x}$ resuelve $y' + y = e^{-x}$?

7.2. Respuestas del simulacro (solo después)

Clave del mini simulacro

1. Lineal. $\mu = x+1$. $y = \frac{x^2/2 + C}{x+1}$.
2. $\mu = e^{-2x}$. $y = xe^{2x}$.

$$3. -\frac{1}{y} = \sin x - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{1 - \sin x} \text{ (cerca de } x = 0).$$

$$4. M_y = 1 = N_x. x^2 + xy - y^2 = C.$$

$$5. v + xv' = 1 + v \Rightarrow xv' = 1 \Rightarrow y = x \ln |x| + Cx.$$

$$6. \mu = x^2. y = \frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2}.$$

$$7. y' = e^{-x} - xe^{-x}, y' + y = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}. \text{ Sí es solución (caso particular de A8 con } C = 0).$$

8. Checklist: 4 días / noche antes / día del examen

8.1. Plan de 4 días (6–9 sep)

Día	Fecha	Qué hacer
0	Dom 6 sep	Leer árbol + chuletas. Rehacer T3.6–T3.9 en blanco. Hacer A5, A6, A8, A10, A12.
1	Lun 7 sep	Exactas A13, A14 + homogéneas A15, A16. Repetir T3.8 (partes) y T3.9.
2	Mar 8 sep	Clasificar/verificar A1–A4. Lineales A9, A11. Una pasada rápida de chuletas.
3	Mié 9 sep	Mini simulacro 40 min. Corregir errores. Rehacer solo lo que fallaste.

8.2. Noche antes (9 sep)

- Recitar el árbol de decisión en voz alta (1 minuto).
- Rehacer T3.6, T3.7, T3.8, T3.9 en hojas en blanco (sin mirar).
- Una exacta y una separable cronometradas (10 min c/u).
- No estudiar material nuevo después de las 22:00.
- Preparar: bolígrafos, lápiz, goma, identificación UDLAP.

8.3. Día del examen (10 sep)

- Desayuno ligero; llegar con 15 min de margen.
- En el pupitre: escribir de memoria el árbol y las 4 chuletas en el margen de la primera hoja (si el profesor lo permite / hoja de borrador).
- Orden de ataque: lineales claros $\rightarrow$ PVI $\rightarrow$ separables $\rightarrow$ exactas $\rightarrow$ homogéneas.
- Cada respuesta enmarcada; cada PVI con chequeo de CI.
- Últimos 10 minutos: solo verificaciones y signos.

Tarjeta de 30 segundos (memoriza esto) Lineal: $\mu = e^{\int P}$, $(\mu y)' = \mu f$.

Separable: $\int \frac{dy}{p(y)} = \int g(x) dx$.

Exacta: $M_y = N_x \Rightarrow F = \int M dx + g(y) = C$.

Homogénea: $v = y/x$, $y' = v + xv'$.

Examen: 10 sep 2026 · Papel · Sin CAS.

Fuentes

Tareas 1–4 del Dr. Felipe Aguilar Romero (UDLAP, HU325).

Libro: Dennis G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*, 11^a edición.

Clases 1–4 del curso (notas HTML/PDF del aula).

Documento generado para estudio a papel — 6 de septiembre 2026.

Fin de la guía · Compilar con `pdflatex` (2 pasadas por el TOC).